

3.4 | 연습문제 정답

01. $c = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$

02. (1) $f(x) = x^3 + x - 1$ 이라 두면 $f(x)$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속이고
 $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = 1 > 0$ 이므로 사잇값 정리에 의해 방정식
 $x^3 + x - 1 = 0$ 은 0과 1 사이에 적어도 하나의 해를 가진다.

(2) 모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ 이므로 f 는 증가함수이다.
 따라서 방정식 $x^3 + x - 1 = 0$ 은 0과 1 사이에 오직 하나의 해를 가진다.

03. $f(x) = (x-1)\sin x$ 는 $[0, 1]$ 에서 연속, $(0, 1)$ 에서 미분가능이고
 $f(0) = f(1) = 0$ 이므로 롤의 정리에 의해 $f'(c) = 0$ 되는 c 가 0과 1 사이
 에 적어도 하나 존재한다. 따라서
 $f'(c) = \sin c + (c-1)\cos c = 0 \Rightarrow \tan c + c - 1 = 0$
 $\therefore$ 방정식 $\tan x + x = 1$ 은 구간 $(0, 1)$ 에서 실근을 가진다.

04. $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 이므로 $[-y, x] \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 이다.

따라서 $f(x) = \tan x$ 는 $[-y, x]$ 에서 연속, $(-y, x)$ 에서 미분가능이므로
 미분의 평균값 정리에 의해

$\frac{\tan x - \tan(-y)}{x - (-y)} = \frac{\tan x + \tan y}{x + y} = \sec^2 c$ 를 만족하는 c 가 구간 $(-y, x)$ 에
 서 존재한다.

$|\sec^2 c| \geq 1$ 이고 $\left| \frac{\tan x + \tan y}{x + y} \right| = |\sec^2 c| \geq 1$ 이므로

$|\tan x + \tan y| \geq |x + y|$ 이다.

05. 주어진 식에 $x \rightarrow x+h$, $y \rightarrow x$ 를 대입하면 $|f(x+h) - f(x)| \leq Mh^2$ 이므로
 $h \neq 0$ 에 대해 $0 \leq \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} \leq Mh$ 이다. 따라서 $h \rightarrow 0$ 이면

$0 \leq |f'(x)| \leq 0 \Rightarrow f'(x) = 0$ 이다. 따라서 $f(x)$ 는 상수함수이다.

- 06.** $f(x) = 3^x$ 은 $[\sin x, x]$ 또는 $[x, \sin x]$ 에서 연속, $(\sin x, x)$ 또는 $(x, \sin x)$ 에서 미분가능이므로 미분의 평균값 정리에 의해 $\frac{3^x - 3^{\sin x}}{x - \sin x} = f'(c) = 3^c \ln 3$ 이 되는 c 가 구간 $(\sin x, x)$ 에서 존재한다. $\sin x < c < x$ 이므로 $x \rightarrow 0^+$ 이면 $c \rightarrow 0^+$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3^x - 3^{\sin x}}{x - \sin x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} 3^c \ln 3 = \ln 3$$

07.

- (i) $f(x) = \tan^{-1} x + \frac{\pi}{6}$ 는 모든 실수에서 연속이므로 $[-1, 0]$ 에서도 연속이다.

$f(-1) \cdot f(0) = -\frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{6} < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여 $f(c) = 0$ 인 $c \in (-1, 0)$ 가 존재한다.

- (ii) 만약 $f(x)$ 가 두 개의 해 α, β 를 가진다고 가정하자. $f(x)$ 는 $[\alpha, \beta]$ 에서 연속이고 (α, β) 에서 미분가능이므로 미분의 평균값 정리에 의해

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = 0 \text{인 } c \in (\alpha, \beta) \text{가 존재한다. 그런데 모든 실수 } x$$

에 대하여 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$ 인 것에 모순이다. 따라서 주어진 $f(x)$ 는 오직 한 개의 해를 가진다.

08. $\theta = \frac{1}{\ln\left(1 + \frac{h}{a}\right)} - \frac{a}{h}$

09. $\frac{1}{2}$

10. $f(x) = \tan^{-1}x$ 라 두면 $-\infty < 0 < x < \infty$ 인 구간 $[0, x]$ 에서 연속이고 $(0, x)$ 에서 미분가능이므로 $\frac{\tan^{-1}x - \tan^{-1}0}{x-0} = \frac{1}{1+c^2}$ 인 $c \in (0, x)$ 가 존재한다.

따라서 $\frac{\tan^{-1}x - \tan^{-1}0}{x-0} = \frac{1}{1+c^2} \Leftrightarrow \left| \frac{\tan^{-1}x - \tan^{-1}0}{x-0} \right| = \left| \frac{1}{1+c^2} \right| \leq 1$ 이고 $|\tan^{-1}x| \leq |x|$ 이다.

11. 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\delta = \sqrt{\varepsilon} > 0$ 가 존재하여 $0 < |x-0| < \delta$ 일 때 $|\tan^{-1}x^2 - 0| = |\tan^{-1}x^2| \leq |x|^2 < \delta^2 = \varepsilon$

12. $f(x) = \ln x$ 라 두면 $0 < a < b < \infty$ 인 구간 $[a, b]$ 에서 연속이고 (a, b) 에서 미분가능이므로 미분의 평균값 정리에 의해 $\frac{\ln b - \ln a}{b-a} = \frac{1}{c}$ 인 $c \in (a, b)$ 가 존재한다.

(1) $c < b \Rightarrow \frac{1}{c} > \frac{1}{b} \Rightarrow \ln \frac{b}{a} = \frac{b-a}{c} > \frac{b-a}{b} = 1 - \frac{a}{b}$ 이고

(2) $c > a \Rightarrow \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \Rightarrow \ln \frac{b}{a} = \frac{b-a}{c} < \frac{b-a}{a} = \frac{b}{a} - 1$ 이다.

13. $f(x) = \tan^{-1}x$, $g(x) = -\cot^{-1}x$ 라 두면 $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = g'(x)$ 이므로

$f(x) = \tan^{-1}x = -\cot^{-1}x + C$ 가 성립한다.

$x=1$ 을 대입하면 $\tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} = \cot^{-1}(1) + C = -\frac{\pi}{4} + C$ 이고 $C = \frac{\pi}{2}$ 이므로

$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ 가 성립한다.

14. $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $g(x) = 2\tan^{-1}\sqrt{x}$ 라 두면

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(1+x)} = g'(x)$ 이므로

$f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = g(x) + C = 2\tan^{-1}\sqrt{x} + C$ 가 성립한다.

$x=1$ 을 대입하면 $\sin^{-1}(0) = 0 = 2\tan^{-1}(1) + C = \frac{\pi}{2} + C$ 이고 $C = -\frac{\pi}{2}$ 이므로

$\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 2\tan^{-1}\sqrt{x} - \frac{\pi}{2}$ 가 성립한다.